4.1 Gli scacchi fatti a pezzi

> *"Inoltre, e su questo non abbiamo statistiche o riferimenti dotti a disposizione, ma ci affidiamo al buon vecchio spirito di osservazione che può essere confermato da chiunque frequenti l'ambiente, a scacchi gioca un gran numero di persone che si faticherebbe a definire intelligenti, qualunque definizione di intelligenza si voglia usare."*

La cosa veramente irritante è che sono un VASP. Non che avessi bisogno di leggere questo libro per saperlo; magari non me lo confessavo apertamente, ma per saperlo, lo sapevo già di sicuro. VASP, Vero Appassionato Stoico Perdente: può non piacermi, ma ce l'ho sotto gli occhi da una vita. Da quando esiste la possibilità di giocare a scacchi online, non passa giorno che non mi cimenti in almeno un paio di partite[8] su una delle due piattaforme scacchistiche più diffuse, quindi almeno la VA (Vero Appassionato) mi tocca di diritto. Il guaio è che la P (Perdente) mi tocca con diritto ancora maggiore: sposto legname sulle scacchiere da più di mezzo secolo, e in entrambe le piattaforme citate[9] il mio punteggio è un po' sotto l'*entry-level*. Rimarrebbe da giustificare la S di Stoico, ma se "stoico" fosse assimilabile a "testone che continua a sorridere quando prende le legnate", allora non ci sarebbe dubbio che tutto l'acronimo mi si addica perfettamente.

Però, state tranquilli: il VASP è poco più che una comparsa, in questo libro; si limita ad essere citato come brevissimo interludio alla fine di vari capitoli, con delle asserzioni che gli fanno fare, più che la figura dello stoico, quella di un altro aggettivo che comunque inizia anch'esso per "st", finisce per "o" e ha una "i" in mezzo. Il vero scopo del libro è quello di aiutare i SUCS a rintuzzare la

[8] Non penserete mica alle partite classiche di una volta, vero? No, solo 3+2, ovvero tre minuti a testa più due secondi per ogni mossa fatta. È quasi impossibile che una partita *blitz* 3+2 tocchi i 10 minuti di durata.

[9] O magari non le abbiamo citate… d'accordo, tanto se siete scacchisti le conoscete già, e se non lo siete non ve ne importa niente, quindi citarle non è neppure pubblicità: parliamo di *chess.com* e di *lichess*.

fastidiosa prosopopea degli SNIB, senza dover essere costretti a misurarsi con loro direttamente sulla scacchiera, perché molti SNIB sono fastidiosamente abili a spostare soldatini sulle 64 caselle.


OTTIMO DA REGALARE A UN AMICO PETULANTE CHE NON PARLA D'ALTRO CHE DI SCACCHI.

L'AMICO CHE VE L'HA REGALATO

Quanto serve conoscere gli scacchi per orientarsi nel mondo d'oggi? Non molto, per la verità. Non si può però ignorare che negli ultimi anni l'interesse per gli scacchi stia pericolosamente aumentando e di conseguenza il rischio di ritrovarsi intrappolati, inermi, in una discussione sul tema. Un amico, un collega o un partner potenziale potrebbero un giorno parlarvi della Siciliana, la loro apertura preferita, escludendovi di fatto dalla conversazione. Magari è già successo, con un sottotesto di inadeguatezza.

La buona notizia è che è sufficiente sapere cosa sono un'apertura, un sacrificio, lo scacco matto e poco altro per fare bella figura, mescolando oculatamente tecnicismi e aneddotica. Conoscerne le regole non guasta, ma è comunque secondario rispetto a esplorare un mondo che coinvolge, tra le altre cose, storie di truffe, spionaggio, esperimenti sui bambini, massoneria e follia. Sarete così in grado di capire ed essere partecipi di un inaspettato e impronosticabile recente successo di un gioco-sport dalla natura lenta, riflessiva e antisociale.

Giorgio Ricca è laureato in matematica e Candidato Maestro di scacchi. Non brilla in nessuna delle due discipline e non ha il dono della prosa scorrevole, questo non gli ha impedito di scrivere un libro su cui riversa le sue aspettative di riscatto. È il fiero vicepresidente del circolo di scacchi ASD Poldo's e una volta ha visto dal vivo il Gran Maestro Viswanathan Anand, di cui sa anche pronunciare il nome.

ISBN 978-88-220-5709-9

€ 18,00 (i.i.)

9 788822 057099

Servono ulteriori spiegazioni, nevvero? Ebbene, SNIB significa Scacchista Novizio Inconsapevole e Borioso; anche se *novizio* non significa per forza giovane, è inevitabile immaginarselo tale: in quanto giovane è quasi sicuramente *inconsapevole*, e anche se ha incontrato da poco gli scacchi è comunque obbligatorio concedergli il titolo di *scacchista*. Non è invece obbligatorio Il *borioso* finale, ma in un certo senso esserlo è proprio il requisito essenziale per qualificarsi come SNIB, perché in sua assenza si resta soltanto scacchisti novizi. Gli SNIB hanno scoperto da poco gli scacchi, hanno anche scoperto di cavarsela bene nei tornei o nelle partite online, e pertanto sono pericolosamente entusiasti. Pericolosi soprattutto per i VASP, naturalmente: ma anche per gli scacchisti un po' meno novizi, un po' più disillusi, e che a differenza dei VASP hanno, almeno in potenza, quanto basta a controbattere e a far sfigurare gli SNIB. Soprattutto lontani dalla scacchiera, possibilmente a cena, come recita con saggezza il sottotitolo; sono questi i SUCS, o gli aspiranti tali: gli Scaltri Utilizzatori di Cultura Scacchistica, coloro che possono abilmente far sfigurare gli SNIB senza neppure la fatica di dargli scacco matto.

Da questa breve presentazione traspaiono subito alcune evidenze: ad esempio, che a Giorgio Ricca, l'autore, piace parecchio David Foster Wallace; oltre che dagli acronimi lo si capisce bene anche dall'uso delle note a piè di pagina (acronimizzate anch'esse) e anche da come scrive[10], e già questo basterebbe a fargli meritare questa recensione. Il guaio è che una buona recensione se la merita anche per tutto il resto.

Di solito, i libri di scacchi hanno l'intenzione di insegnare a giocare a scacchi. Non solo quelli che si propongono proprio come manuali per principianti, ma anche gli altri. Se siete riusciti a trovare un testo sull'Attacco Panov-Botvinnik della Difesa Caro-Kann[11] di sicuro non avete bisogno di qualcuno che vi spieghi come funziona l'arrocco, ma di fatto avete comunque acquistato un libro con l'intenzione di migliorare il vostro gioco. Ebbene, questo libro non se lo sogna neppure, di spiegarvi quale sia la cosa migliore da fare in una certa posizione. Noi, in qualità di vecchi VASP, abbiamo sempre amato molto un vecchio libro di

[10] Non stiamo dicendo che sia bravo tanto quanto DFW, sia chiaro: solo che gli piacerebbe esserlo.

[11] Non abbiamo idea se un libro del genere esista davvero, ma siamo pronti a scommettere di sì.

Bagnoli[12] che, più che parlare del *gioco* degli scacchi, parlava del *mondo* degli scacchi, e ci siamo spesso rammaricati di non trovare altri testi che avessero un approccio simile. Beh, a dire il vero non è che abbiamo rovistato le librerie di mezza Italia alla ricerca di qualcosa del genere, ma la dea Fortuna ci ha sorriso, perché questo libro di Ricca appartiene di sicuro a quella preziosa e rara categoria.

A proposito di Giorgio Ricca: è un matematico, ed è pure un Candidato Maestro. Se non siete familiari con i titoli scacchistici, quello di Candidato Maestro (CM) è, in un certo senso, il titolo spartiacque, e questo vale sia per i titoli nazionali (cioè della FSI, Federazione Scacchistica Italiana) che per quelli internazionali (FIDE, *Fédération internationale des échecs*). Non solo perché, in entrambe le federazioni, è il titolo che precede quello di Maestro (Maestro nazionale per la FSI, Maestro Internazionale per la FIDE: sono cose diverse) ma proprio perché può essere una sorta di momento cruciale nella carriera scacchistica. Un Candidato Maestro è sicuramente bravo a giocare a scacchi, ma è proprio nel momento cruciale in cui capisce che, se vuole continuare la carriera agonistica, dovrà riservare una quota sostanziale del suo tempo agli scacchi, e se continuare o no diventa insomma una scelta importante. Un CM ha comunque un punteggio Elo (sì, certo che si parla dell'Elo, nel libro: e anche del Glicko-1 e del Glicko-2, se è per questo) che oscilla tra i 2000 (FSI) e i 2200 (FIDE), e questo significa anche che, seguendo la regoletta empirica del "400" (sì, si spiega anche questa) una schiappa come il sottoscritto ha più o meno una probabilità su cinquemila di riuscire a batterlo (se non ho sbagliato i conti).

Ma comunque no, non sto facendo una presentazione corretta del libro: parlo troppo degli scacchi in sé, sembro quasi uno SNIB: il libro ha invece un respiro e un intento diverso. Certo, inizia parlando di cose indispensabili anche solo per poter parlare di scacchi, come le notazioni, i pezzi – ma nel contempo raccontando anche il perché di certi nomi e ruoli dei pezzi – e illustra perfino una partita completa, la leggendaria Immortale tra Anderssen e Kieseritzky, anche se fa finta di farlo solo per spiegare come si trascrivono le mosse. Ma l'intento dichiarato del libro è vero: per diventare un SUCS, insomma un esperto di Cultura Scacchistica, bisogna certo sapere come funziona una partita a scacchi, ma questo è solo l'abc, e lo si ripassa velocemente nei primissimi capitoli. E poi in realtà non è solo un mero artificio per ripassare i meccanismi del gioco: anche per chi gioca a scacchi tutti i santi giorni ci trova dentro delle cose interessanti. Ma resta il fatto che il meglio viene dopo, nella seconda metà del libro, quella intitolata "Tutto il Resto".

È qui che Ricca racconta, ad esempio, di come l'abilità scacchistica degli elaboratori abbia cambiato radicalmente la natura del gioco, non fosse altro che per la possibilità di barare: quando Fischer e Spassky giocavano una siciliana a Reykjavík per il Campionato del Mondo, si potevano mettere in atto fastidi, trucchetti e malizie psicologiche, ma erano di fronte i cervelli scacchistici più forti del mondo, come si poteva pensare di "barare"? A chi chiedere, con la partita in corso, quale fosse la mossa migliore possibile? Adesso non è più così: anche se Magnus Carlsen sfoggia un Elo prossimo a 2900, ci sono menti scacchistiche che lo guardano dall'alto di punteggi attorno ai 3500, e che sono pronte a suggerire il da farsi a chiunque, se glielo chiedi premendo i tasti giusti di un telefonino.

E perché le donne sembrano essere meno brave? Ma è poi vero che sono meno brave[13]? E perché i russi sono così forti? Ma è poi vero che sono così forti? E sarà poi vero che giocare bene a scacchi significa essere più intelligenti della media? E poi, visto che leggete questa rivista, andate a perdervi dentro capitolo 15, dove si racconta della parentela tra matematica e scacchi, o dei metodi messi in atto per ridurre i problemi di deflazione o di inflazione del punteggio Elo, nel capitolo dedicato.

---

[12] Paolo Bagnoli, *Scacchi*, Mursia 1978.

[13] Non vi daremo la risposta, ma vi anticipiamo che a pagina 182 del libro è riportato un problema creato da una donna, la sublime Judit Polgár, la più grande scacchista mai comparsa sul pianeta. Il problema è molto bello, anche se non impossibile da risolvere, anzi. Provateci, se vi capita sottomano, e congratulatevi con voi stessi se riuscite a risolverlo. Subito dopo, continuate a leggere e rimettete a posto la mandibola caduta, quando scoprite che Judit l'ha composto quando aveva quattro anni.

Insomma, è un libro di scacchi, eppure si finisce col leggerlo in fretta, quasi di corsa. Sembra una contraddizione in termini, vero?

Titolo	Gli scacchi fatti a pezzi
Sottotitolo	Saperne abbastanza per non sfigurare a cena
Autore	Giorgio Ricca
Editore	Edizioni Dedalo
Data Pubblicazione	Maggio 2025
Pagine	265
ISBN	9-788822-057099
Prezzo	18,00 euro

5. Soluzioni e Note

Luglio!

La Redazione di questa Prestigiosa Rivista è in semi-vacanza, nel senso che tra luglio e agosto non si sa mai chi c'è e chi manca, come nel gioco delle figurine. Per fortuna che siamo in tre… e tre sono i problemi proposti il mese scorso.

5.1 [317]

5.1.1 Caproni colorati in tre sfumature

Il mese scorso il Capo si è esibito con tre problemi caprini, cominciamo con il primo:

> *Rudy si è inventato un gioco e sta facendo giocare Alice e Doc: il gioco è cooperativo (devono vincere entrambi), e i due giocatori sono separati e non possono vedersi; non solo, ma il gioco va avanti sin quando i due vincono o perdono; infine, ciascuno dei due presume l'altro intenzionato a vincere e logico quanto sé medesimo.*
>
> *A ogni turno, ogni giocatore ha due scelte possibili:*
>
> 1. *Dichiarare "Termino il gioco con il colore...", dicendo un colore, oppure:*
> 2. *scambiare un messaggio (di qualunque lunghezza) con l'avversario.*
>
> *Il meccanismo di comunicazione è tale che i due messaggi arrivano contemporaneamente a entrambi i giocatori, chiudendo il turno.*
>
> *Se entrambi i giocatori terminano il gioco con lo stesso colore nello stesso turno, vincono; se terminano il gioco in momenti diversi o (se terminano entrambi allo stesso turno) il colore non è lo stesso, perdono. Come giocate?*

La seconda parte estende le possibilità dei giocatori:

> *Nel secondo gioco, esiste una terza possibilità di scelta: un giocatore può decidere di stare zitto. Se entrambi i giocatori in un dato turno mandano un messaggio (che non sia quello di chiusura gioco) allora arriva una segnalazione di errore (e niente messaggio) ai due giocatori.*

La terza richiede una soluzione probabilistica (argh!):

> *A ogni turno un solo giocatore manda un messaggio e l'altro aspetta sempre il turno successivo per rispondere; non avete certezza che il vostro messaggio arrivi; come fate?*

Va bene, diamoci da fare. Cominciamo con ***Valter***:

> I giocatori non possono concordare nulla prima dell'inizio del gioco. Inoltre, i due non possono vedersi durante lo svolgimento del gioco. Infine, ognuno sa che l'altro intende vincere ed è logico quanto lui.
>
> Date le precondizioni ritengo che debbano scegliere la strategia che:
>
> - sia, fra quelle possibili, la più "semplice" di tutte le pensabili (di modo che, anche senza un accordo, entrambi usino proprio quella)

- … essendo entrambi logici, dovrebbero concordare su tale strategia
- se non si ha certezza di vittoria deve darne la massima probabilità.

Assumendo tali premesse propongo le strategie per le tre sfumature:

- la prima sfumatura si affida a "semplici" scelte deterministiche (funziona perfettamente in soli due turni usando i tre colori base)
- la seconda sfumatura richiede invece una strategia probabilistica (… ma comunque porta al successo dopo pochi turni, …quasi sempre)
- la terza sfumatura non dà certezza ma solo la migliore probabilità.

prima sfumatura

Usano come messaggio uno dei tre colori primari: rosso, giallo e blu.

Al primo turno, entrambi inviano in modo casuale uno dei tre colori.

Se i colori coincidono, al secondo turno, terminano con tale colore.

Se i colori sono diversi terminano poi con il colore mancante dei tre.

Il gioco, quindi, termina certamente con la vittoria al secondo turno.

La strategia proposta è, a mio avviso, quella minimale e più semplice:

- minimizza il numero turni con cui concludere il gioco con successo
- usa un linguaggio semplice senza dover usare transcodifiche inutili (si serve infatti come linguaggio condiviso nei messaggi dei colori)
- l'uso dei colori primari dovrebbe essere lo "standard" più abituale.

seconda sfumatura

In questa variante, se entrambi parlano il messaggio va perso.

La comunicazione riesce solamente se uno parla e l'altro tace.

A ogni turno i due scelgono in modo casuale, con probabilità p=50%, se:

- parlare e inviare uno dei tre colori primari
- oppure tacere.

Se uno parla e l'altro tace entrambi ora conoscono il colore comunicato.

Al turno successivo, entrambi terminano usando quel colore per vincere.

Probabilità di successo:

- probabilità di successo in un turno: $\mathrm{P} = 2p(1-p)$
- probabilità cumulativa dopo n turni: $\mathrm{P}(n) = 1-(1-2p(1-p))n$.
- questa funzione cresce esponenzialmente e tende rapidamente a 1 (dopo 5 turni, ad esempio, si ottiene oltre il 96% di successo).

terza sfumatura

Mi pare che il problema sia analogo a quello dei due Generali Babilonesi (non c'è modo per garantire una conferma sulla ricezione del messaggio):

- i due decidono di terminare subito con un uno dei colori fondamentali
- probabilità di vittoria: 1/3, se scelgono casualmente lo stesso colore
- nessun modo per aumentare la certezza senza comunicazione affidabile.

Ottimo. La seconda soluzione è di ***Luigi***:

Problema 2.1.1

Al primo turno di gioco invierei questo messaggio:

Io scelgo il colore X. Dal prossimo turno sceglierò, a caso (ovvero con lancio della monetina), uno tra il colore X ed il colore Y (scelto da te). Ti consiglio di fare anche tu altrettanto. Se al termine di uno dei prossimi turni il colore da me scelto sarà uguale al colore scelto da te nel turno successivo concluderemo il gioco con il colore che entrambe avremo scelto

Dal secondo turno in poi, seguirò quanto detto nel primo messaggio.

Problema 2.1.2

In questo secondo caso, se ho capito bene, al termine di ogni turno ci sono 4 possibilità:

1 – mi arriva un messaggio (io sono rimasto zitto, l'altro mi ha mandato un messaggio)

2 – mi arriva una segnalazione di errore (entrambe abbiamo mandato un messaggio)

3 – non mi arriva niente ma ho mandato un messaggio

4 – non mi arriva niente e non ho mandato un messaggio

Ogni turno decido, a caso, se star zitto o mandare un messaggio

Il messaggio che mando (e che eventualmente spero di ricevere) è il seguente:

Io scelgo il colore X. Io capirò che avrai letto questo messaggio perché non avrò segnalazioni di errore, quindi il prossimo turno terminiamo il gioco scegliendo il colore X

Al termine di ogni turno mi comporterò così per il turno successivo:

caso 1 terminerò il gioco con il colore scelto dall'altro giocatore,

caso 2 riprovo, scegliendo a caso, tra star zitto e mandare un messaggio

caso 3 terminerò il gioco scegliendo il mio colore

caso 4 riprovo come caso 2

Problema 2.1.3

Ipotizzo che ci sia un accordo iniziale su chi invierà il messaggio per primo.

Ipotizzo che entrambe hanno un numero uguale N di piccioni.

Il primo giocatore scriverà:

Messaggio A1: "il colore da me scelto è X, nel turno 2N+1 concluderò il gioco scegliendo il colore X"

Il secondo giocatore in base al fatto di aver ricevuto o no il messaggio risponderà in modo diverso:

caso 1: non ha ricevuto il messaggio del primo giocatore:

messaggio A2: "Non ho ricevuto il tuo messaggio il colore da me scelto è Y, nel turno 2N+1 terminerò il gioco scegliendo il colore Y"

caso 2: ha ricevuto il messaggio del primo giocatore:

messaggio B2: "ho ricevuto il tuo messaggio anche io terminerò il gioco al turno 2N+1 scegliendo il colore X da te scelto"

a questo punto il giocatore 2 continuerà ad inviare questo messaggio in tutti i seguenti turni e terminerà il gioco al turno 2N+1 scegliendo il colore X

Ai turni successivi il giocatore 1 ha davanti queste 3 possibilità:

Caso 1 – non riceve messaggi (nel senso continua a non ricevere alcun messaggio)

  Continuerà ad inviare il messaggio A1

Caso 2 – Riceve il messaggio A2

  Invia il messaggio B1

messaggio B1: "ho ricevuto il tuo messaggio anche io terminerò il gioco al turno 2N+1 scegliendo il colore Y da te scelto"

a questo punto il giocatore 1 continuerà ad inviare questo messaggio in tutti i seguenti turni e terminerà il gioco al turno 2N+1 scegliendo il colore Y

Caso 3 – Riceve il messaggio B2

Può smettere di inviare messaggi e terminerà il gioco al turno 2N+1 scegliendo il colore X

Ai turni successivi il giocatore 2 si comporterà in modo speculare:

Caso 1 – non riceve messaggi (nel senso continua a non ricevere alcun messaggio)

Invia il messaggio A2

Caso 2 – Riceve il messaggio A1

Invia il messaggio B2

a questo punto il giocatore 2 continuerà ad inviare questo messaggio in tutti i seguenti turni e terminerà il gioco al turno 2N+1 scegliendo il colore X

Caso 3 – Riceve il messaggio B1

Può smettere di inviare messaggi e terminerà il gioco al turno 2N+1 scegliendo il colore Y

Ora è sufficiente che uno dei 2N piccioni giunga a destino affinché i giocatori vincano il gioco.

Come spesso succede, questa povera redattrice è rimasta senza parole. Alla prossima!

6. Quick & Dirty

Doc ha pensato un numero tra 1 e 1000, e Alice deve indovinarlo. A ogni domanda di Alice, Doc risponderà (onestamente) "Sì", "No" o "Non lo so". Quante domande servono ad Alice per indovinare il numero?

Il colpo di genio, in questo gioco, è "combattere Doc con le sue stesse armi": questo permette di risolvere il problema in sette passaggi anziché gli usuali dieci della ricerca binaria.

La prima domanda di Alice è: "Ho pensato un numero tra 333 e 666; il tuo numero è minore del mio?"

Se Doc risponde "Sì", il numero di Doc è compreso tra 1 e 332.

Se Doc risponde "No", il numero di Doc è compreso tra 667 e 1000.

Se Doc risponde "Non lo so", il numero di Doc è compreso tra 333 e 666.

Alle domande successive, Alice ripete la domanda dividendo in terzi l'intervallo individuato; sette domande permettono di individuare il numero.

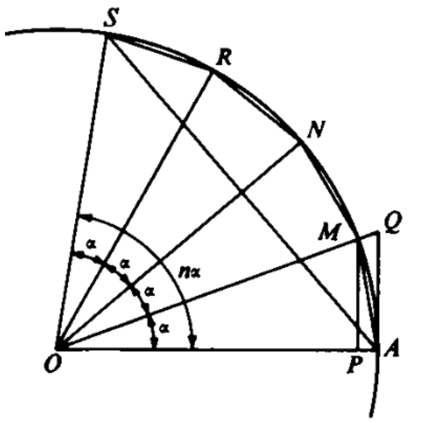
Generalizzando, se i limiti dell'intervallo sono a e b, l'intervallo proposto da Alice sarà:

$$\left(a+\frac{b-a}{3}, a+\frac{2(b-a)}{3}\right).$$

7. Pagina 46

La dimostrazione richiede alcune dimostrazioni ausiliarie, che vengono svolte in testo indentato.

Supponiamo l'angolo α giaccia nel primo quadrante.



Dimostriamo che, in questo caso, $sin\alpha < \alpha < tan\alpha$.

Denotando con $S(F)$ l'area di una figura piana F, nella figura a fianco si ha:

$$S(triangoloOAM) = \frac{1}{2}OA \cdot MP = \frac{1}{2}sin\alpha$$

$$S(settoreOAM) = \frac{\alpha}{2\pi}S(cerchio) = \frac{\alpha}{2\pi}\pi$$

$$S(triangoloOAQ) = \frac{1}{2}OA \cdot AQ = \frac{1}{2}tan\alpha$$

e quanto richiesto segue dal fatto che:

$S(triangoloOAM) < S(settoreOAM) < S(triangoloOAQ)$.

Da quanto qui sopra, si deduce che è:

$$\text{cosec}\alpha > \frac{1}{\alpha} > cot\alpha$$

Dimostriamo ora che è:

$$\sum_{i=1}^{m} cot^2 \frac{i\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3} \text{ e } \sum_{i=1}^{m} \text{cosec}^2 \frac{i\pi}{2m+1} = \frac{m(2m+1)}{3}$$

Per quanto riguarda la prima formula, calcoliamo il polinomio a coefficienti razionali le cui soluzioni sono i termini della sommatoria.

Ricordiamo che è:

$$sinn\alpha = \binom{n}{1} sin\alpha cos^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} sin^3\alpha cos^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} sin^5\alpha cos^{n-5}\alpha - \cdots;$$

questa formula si ottiene espandendo attraverso il teorema del binomio il primo membro della formula di DeMoivre:

$$(cos\alpha + isin\alpha)^n = cosn\alpha + isinn\alpha$$

e uguagliando tra di loro le parti reali e immaginarie di entrambi i membri.

Quanto sopra può essere scritto come:

$$sinn\alpha = sin^n\alpha \left[\binom{n}{1} cot^{n-1}\alpha - \binom{n}{3} cot^{n-3}\alpha + \binom{n}{5} cot^{n-5}\alpha - \cdots\right]$$

Essendo $2m$+1 dispari, se $\boldsymbol{\alpha}$ assume uno qualsiasi dei valori:

$$\frac{\pi}{2m+1}, w\frac{2\pi}{2m+1}, w\frac{3\pi}{2m+1}, \dots, w\frac{m\pi}{2m+1}$$

allora sin($2m$+1)α=0 e sin α≠0, e quindi:

$$\binom{2m+1}{1} cot^{2m}\alpha - \binom{2m+1}{3} cot^{2m-2}\alpha + \binom{2m+1}{4} cot^{2m-4}\alpha - \cdots = 0$$

e quindi l'equazione

$$\binom{2m+1}{1} x^{2m} - \binom{2m+1}{3} x^{2m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{2m-2} - \cdots = 0$$

ha radici:

$$cot^2\frac{\pi}{2m+1}, wcot^2\frac{2\pi}{2m+1}, \dots, cot^2\frac{m\pi}{2m+1}$$

Allora, il polinomio

$$\binom{2m+1}{1} x^{m} - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \cdots$$

è divisibile per ognuno dei termini:

$$x - \frac{\pi}{2m+1}, wx - \frac{2\pi}{2m+1}, \dots, x - \frac{m\pi}{2m+1}$$

Da questo si conclude che, se $\boldsymbol{A}$ è una costante,

$$\binom{2m+1}{1} x^{m} - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \binom{2m+1}{5} x^{m-2} - \cdots$$
$$= A\left(x - cot^2\frac{\pi}{2m+1}\right)\left(x - cot^2\frac{2\pi}{2m+1}\right)\dots\left(x - cot^2\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$

Sviluppando le parentesi a secondo membro di questa equazione e uguagliando tra di loro i coefficienti di x^m e di x^{m-1} di entrambi i membri, otteniamo

$$\binom{2m+1}{1} = A$$

$$\binom{2m+1}{3} = A\left(cot^2\frac{\pi}{2m+1} + cot^2\frac{2\pi}{2m+1} + \cdots + cot^2\frac{m\pi}{2m+1}\right)$$

e quindi:

$$cot^2\frac{\pi}{2m+1} + cot^2\frac{2\pi}{2m+1} + \cdots + cot^2\frac{m\pi}{2m+1} = \frac{\binom{2m+1}{1}}{\binom{2m+1}{3}} = \frac{m(2m+1)}{3}$$

ed essendo $\mathrm{cosec}^2 a = \cot^2 a + 1$, si deduce allora che:

$$\mathrm{cosec}^2\frac{\pi}{2m+1} + \mathrm{cosec}^2\frac{2\pi}{2m+1} + \cdots + \mathrm{cosec}^2\frac{m\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3} + m = \frac{2}{3}m(2m+1)$$

Da quanto detto, segue allora che:

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \cdots \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{m(m+2)}{3}$$

ossia

$$\frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1-\frac{2}{2m+1}\right) < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{m^2} < \frac{\pi^2}{6}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)\left(1+\frac{1}{2m+1}\right)$$

Dato che il primo e il terzo termine tendono entrambi allo stesso limite $\pi^2/6$ per m tendente a infinito, allora deve essere:

$$\lim_{m\to\infty}\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}\right\} = \frac{\pi^2}{6}$$

che è quanto richiesto.

[Nota di redazione: In un modo molto simile si dimostra che:

$$\lim_{m\to\infty}\left\{1 + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{3^4} + \cdots + \tfrac{1}{m^4}\right\} = \tfrac{\pi^4}{90}.$$

Esiste un modo compatto per esprimere il denominatore del secondo membro, in funzione dell'esponente dei termini della serie a primo membro?].

8. Paraphernalia Mathematica

Anni fa, quando era di moda il *teamworking*, al primo meeting di un gruppo era normale fare qualche gioco molto idiota come *icebreaking*[14]. Il meno idiota che Rudy abbia mai incontrato consisteva nel dividersi in coppie casuali e scambiarsi informazioni su noi stessi; ciascuno, poi, avrebbe presentato l'altro. Jon era sembrato piuttosto stupito del fatto che si potesse fare della matematica il proprio hobby, e si era convinto solo quando Rudy gli ha mostrato che il *suo* hobby aveva profonde e complicate radici matematiche. La cosa si è rivelata molto utile, visto che un mese dopo Jon è diventato il capo di Rudy.

8.1 Fra Martino je spiccia casa – 1 – Le basi

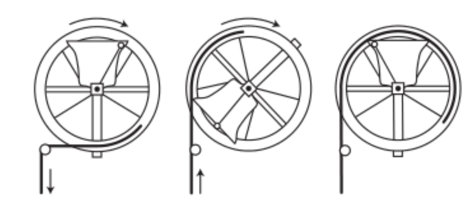
L'hobby di Jon era la campanologia (traduzione nostra di *campanology*): la definizione più sensata che abbiamo trovato recita "L'arte, la scienza e l'attività del *bell ringing* o *campanology* consiste nel suonare (*ringing*[15]) sequenze distinte di permutazioni di b campane"; anche l'autore di questa perla si rivela insoddisfatto di quanto ha appena scritto, visto che si premura di aggiungere "in seguito sarà tutto più chiaro". Noi, a livello di notazione, ci limitiamo ad aggiungere che questa attività, diffusissima nel Regno Unito, non ha più alcuna relazione con la religione o la messa; si tratta solo di un gruppo di allegroni che, alle ore più balzane, decidono di fare un *carillon* per la gioia del mandamento. In Italia, il suonare le campane è comunque legato agli uffici liturgici e quindi di queste cose non si parla, tant'è che neppure Wikipedia italiana riporta la voce. Questo è anche il motivo per cui abbiamo mantenuto tutti i termini tecnici in inglese.

Dato un insieme (o *ring*) di b campane in un campanile, ordiniamole per tonalità da 1 (l'acuto, o *treble*) a b (la più bassa, o *tenor*); in campanologia, le campane vengono suonate una per volta e a ritmo costante. Un *change* è una sequenza che suona una volta tutte le campane in un qualche ordine: più matematicamente, rappresenta una permutazione di $[b]$, l'insieme ordinato dei numeri da 1 a b; il numero dei *change* è evidentemente $b!$ e la "sequenza identità" $(1, 2, 3, \dots, b)$ è detta *round*.

La cosa sin qui sembra facile, ma arrivano le complicazioni: la *ringing sequence* dei *change* deve sottostare a precise regole:

1. Il primo e l'ultimo *change* devono essere uguali (sono il *round*).
2. Tutti i *change* nella *sequence* (a parte i due *round*) devono essere diversi.
3. Da un *change* al successivo, nessuna campana si sposta di più di un posto nella *sequence*.

Il punto (3) implica che se una campana cambia posizione nella *sequence*, lo può fare solo con la campana precedente o successiva. La cosa può sembrare piuttosto cervellotica, ma è legata a come funzionano le campane campanologiche: in figura, trovate uno schema piuttosto incomprensibile.



9 *Din (senza don).*

In pratica, voi tirate la corda, la campana suona e, per inerzia, continua sino alla terza figura dove, trattenendo la corda, potete bloccarla sin quando non tocca di nuovo a voi suonare; a questo punto, secondo senso comune avreste dovuto suonare due volte, ma c'è il trucco: nella terza posizione, il battacchio appoggia su un feltro che gli impedisce di suonare, quindi dalla sequenza ottenete un solo suono. Inoltre, se vi pare complicato tenere la campana nella terza posizione, avete perfettamente ragione: secondo Jon, metà dell'arte campanaria sta in quel punto (l'altra metà la vediamo dopo). Proprio da questa difficoltà di mantenimento dell'equilibrio nasce la terza regola: è (quasi) impossibile tenere in questo equilibrio una

[14] Se vi sembra che questa prima frase abbia troppi termini inglesi, tranquilli: dopo è peggio.

[15] Tradizionalmente i campanari (uno per campana) sono disposti ad anello (*ring*), ciascuno con in mano la sua corda; il gioco di parole a noi pare terribile, ma persiste dal Medio Evo.

campana per un lungo tempo. Questo sistema, comunque, permette di rendere standard il tempo tra un rintocco e l'altro della medesima campana, che risulta con buona approssimazione di due secondi.

Lo scopo ultimo di un campanologo è quello di riuscire a suonare un *extent* di *b* campane, dove per *extent* si intende l'esecuzione di tutti i *change* possibili sottostando alle tre regole viste sopra: qui di fianco (se la linotype non ci uccide prima) trovate un *extent* per quattro campane, noto nella letteratura come *Plain Bob Minimus* (ulteriori notizie in seguito); notate che già al primo *change* (dopo il *round*: insomma, la seconda riga) ci sono due scambi (1 con 2 e 3 con 4): questo in quanto non abbiamo mai detto che debba esserci un solo scambio per *change*: l'importante è che lo scambio sia di una sola posizione.

1234
2143
2413
4231
4321
3412
1324
1342
3124
3214
2341
2431
4213
4123
1432
1423
4132
4312
3421
3241
2314
2134
1243
(1234)

10 *Facile.*

L'ultimo *change* lo abbiamo messo tra parentesi perché è uguale al *round*: di solito non viene indicato, ma viene comunque eseguito; non dovreste avere problemi ad accorgervi che per *b* campane, il numero di *change* (contando anche i due *round* iniziale e finale) è $b!+1$.

L'altra metà dell'arte campanaria sta nel fatto che non potete portarvi gli appunti nella stanza del campanile.

Già, dovete impararli a memoria, il che non è facile; per questo sono stati sviluppati dei metodi (*methods*) e dei principi (*principles*) ragionevolmente semplici da memorizzare, di cui parleremo in seguito; per il momento, vi diamo il *method* per il *Plain Bob Minimus* a quattro campane, che vedete qui di fianco:

1. Iniziate con un *round*.
2. Scambiate due coppie di campane adiacenti
3. Scambiate la coppia centrale di campane adiacenti
4. Ripetete i passi (2) e (3) sin quando, dopo otto *change*, il prossimo vi riporterebbe al *round*.
5. Per evitare questo, scambiate invece l'ultima coppia di campane adiacenti.
6. Ripetete il tutto altre due volte e siete pronti a tornare al *round* al prossimo *change*.

Sempre per proseguire nelle descrizioni erudite, il numero delle campane coinvolte ha ricevuto una serie di nomi specifici: il *Singles*, con tre campane, il *Minimus* (quattro, quindi quello dell'esempio), il *Doubles*, di cinque, il *Minor* (sei: il più diffuso), *Triples*, di sette, *Major*, *Caters, Royal*, *Cinques* e *Maximus*, rispettivamente di otto, nove, dieci, undici e dodici campane[16]; teoricamente esisterebbe anche l'insieme a sedici campane ma, considerato che i *change* del suo *extent* sono 20 922 789 888 001 e a colpi di due secondi a campana richiede 1 326 914 anni per essere eseguito, capite che viene scarsamente preso in considerazione. Se siete interessati a queste realizzazioni (lontano da casa nostra, per favore), vi possiamo dire che al momento il record dovrebbe essere un *Plain Bob Major* (quindi secondo il *method* dato qui sopra ma portato a otto campane) che ha impiegato 17 ore e 58 minuti senza pause (Loughborough Bell Foundry, 27 luglio 1963).

Prima che ci picchiate, forse è meglio passare a un po' di matematica...

[16] Nota per i giallofili: il romanzo *The Nine Tailors* di Doroty Sayers è incentrato sul fatto che l'investigatore (Lord Peter Wimsey) è un esperto campanologo e le sue conoscenze nel ramo gli permettono di decrittare un codice e risolvere un omicidio; le citazioni all'inizio di ogni capitolo del libro provengono dal testo di campanologia di Charles Arthur William Troyte, che se proprio volete farvi del male trovate su Internet Archive (pochissima matematica); sviluppa comunque a fondo il concetto di *peal* (fondamentale nel romanzo) che qui non tratteremo: sostanzialmente, si tratta di un certo numero di *extent* (maggiore di 1 per meno di sette campane, minore di uno per più di sette) per arrivare a una durata prestabilita (di solito, 5000 *changes*): nel romanzo ne viene eseguito uno che dura l'intera notte, con grande gioia dei villici riposanti.

Anche se i Veri Campanologi hanno tutto in testa, esiste una notazione che ci permette di scrivere cosa succede, ed è quella delle ***permutazioni***. Consideriamo un *change* immediatamente dopo il *round*, ossia la sequenza:

123456

132546

In pratica, abbiamo permutato il 2 con il 3 (e il 3 con il 2) e il 4 con il 5 (e il 5 con il 4); considerato che questi due cambi sono indipendenti tra di loro, possiamo indicarli come (23)(45); ossia, a ogni sequenza di n+1 termini corrisponde una *sequenza di transizioni* formata da n termini, che registra le transizioni a partire dal *round* attraverso tutti i *change*.

Facciamo un esempio semplice: con tre campane, possiamo costruire l'*extent*:

123 213 231 321 312 132 (123)

Vengono usate due transizioni:

A=(12)

B=(23)

E il nostro *extent* è quindi costruibile attraverso la sequenza di transizione:

$$ABABAB = (AB)^3$$

Ossia, possiamo considerare la sequenza di transizioni come un ***elemento di un gruppo simmetrico*** opportuno.

A questo punto, possiamo costruire alcuni metodi formali per ricavare da una sequenza data r una nuova sequenza; per fare questo, ci sarà utile considerare la matrice (o meglio, il *ringing array*) della nostra sequenza; in pratica, l'i-esima riga della matrice non è altro che l'i-esimo *change* della sequenza considerata; inoltre, definiremo $t=A_1A_2...A_l$ la sequenza di transizioni che dà origine a r.

La prima "trasformazione" è piuttosto semplice: si definisce inverse la riflessione della matrice secondo un asse orizzontale; in pratica, l'ultima riga diventa la prima, la penultima la seconda, eccetera, sino alla prima riga che diventa l'ultima; siccome le trasformazioni sono elementi di un gruppo simmetrico, anche questa è una sequenza che segue tutte le regole canoniche.

Se la nostra sequenza è generata da b campane, possiamo applicare un'altra trasformazione, detta ***reverse***: a ogni valore i della sequenza originale, prima sostituiamo il valore $b+1-i$, e quindi riflettiamo la sequenza lungo un asse verticale; anche in questo caso, quella ottenuta è una sequenza "legale".

Notiamo che l'*inverse* di un *inverse* (e il *reverse* di un *reverse*) riportano alla sequenza originale.

Un'altra trasformazione agisce sulla sequenza di transizioni: la sequenza $A_lA_1A_2...A_{l-1}$ (in pratica, spostiamo l'ultima transizione all'inizio) si dice ***cyclic shift***.

Data una sequenza r di b campane, è possibile ottenerne una di "ordine" superiore ossia, per k numero intero positivo, ottenere una sequenza di $b+k$ campane; per prima cosa, notiamo che la sequenza di transizione di r è anche sequenza di transizione di $r+k$; questa nuova sequenza che otteniamo è detta ***right vertical k-shift***; successivamente, aggiungiamo k a ogni elemento (della matrice) della sequenza e scriviamo davanti a ogni riga della matrice 1234...k; questa seconda operazione è nota come ***left vertical k-shift***.

È stato definito un modo molto elegante per ottenere da una sequenza su b campane una sequenza su b+1 campane con l'interessante caratteristica di conservare l'*extent*: ossia, se la sequenza originale è un *extent* su b campane, la sequenza risultante è un *extent* su b+1 campane: questa trasformazione è detta ***elevation*** di r.

Per prima cosa, costruiamo una matrice di $b\times((b+1)l+1)$ elementi, nella quale le prime b+1 righe coincidono con il primo *change* di r, le seconde b+1 righe con il secondo *change* di r, eccetera (in pratica, scrivete b+1 volte ogni riga, di seguito); indi, aggiungete 1 a ogni elemento di questo nuova matrice: questa è nota come matrice ausiliaria.

Infine, notate che abbiamo sempre b+1 righe, una dietro l'altra, uguali tra loro: inseriamo un 1 in ogni riga, nelle posizioni 1, 2, ..., b+1 (e, con il secondo gruppo, da capo). Fatto!

Un esempio? Teniamoci sul semplice, e partiamo dall'*extent* di due campane:

12 21

aggiungiamo 1 a ogni elemento e triplichiamo (partivamo da b=2, quindi b+1=3) ogni riga:

23 23 23 32 32 32

Adesso, inseriamo gli 1 in prima, seconda, terza, prima, seconda e terza posizione:

123 213 231 132 312 321

...e, se il primo era un *extent* di due campane, quello che otteniamo è un *extent* di 3 come *elevation* della sequenza originale; in modo iterativo, potete andare avanti a costruire tutti i sistemi successivi (volendo, avremmo potuto partire dall'*extent* di una sola campana, ma ci sembrava poco chiarificatore).

Alcuni *extent* ricavati in questo modo hanno dei nomi particolari: l'*elevation* del *Plain Bob Singles* è il *Double Canterbury Minimus*, e l'*elevation* dell'*inverse* del *Plain Bob Singles* è il *Double Court Minimus*.

Ma di questi (e di altri) parleremo un'altra volta, con molti più disegni. Intanto, fate amicizia col sacrestano, che ha le chiavi.

Rudy d'Alembert
Alice Riddle
Piotr R. Silverbrahms